数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 26-38

加法群から乗法群への変形群スキームの加法群による拡大について

中大理工 (D.C.) 谷戸 光昭 (Mitsuaki YATO)

1. 序

一般に A を可換環，$\lambda \in A$ とする．$\mathbb{G}_{a,A}$ を A 上の加法的群スキーム，$\mathbb{G}_{m,A}$ を A 上の乗法的群スキームとする．(本稿では単に加法群，乗法群と呼ぶ．) このとき，加法群 $\mathbb{G}_{a,A}$ の乗法群 $\mathbb{G}_{m,A}$ への変形を与える群スキーム $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ は次のように定義される：$\mathcal{G}^{(\lambda)} = \mathrm{Spec}\, A[T, \frac{1}{1+\lambda T}]$. ここで，群の算法は $T \mapsto \lambda T \otimes T + T \otimes 1 + 1 \otimes T$ により与えられる．特に，$\lambda \in A^{\times}$ ならば同型 $\mathcal{G}^{(\lambda)} \simeq \mathbb{G}_{m,A}$ が得られ，$\lambda = 0$ ならば $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ は $\mathbb{G}_{a,A}$ に他ならない．$\mathcal{G}^{(\lambda)}$ の $\mathbb{G}_{a,A}$ による可換な拡大の同型類全体を $\mathrm{Ext}^1_A\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$ と書く．これが群をなすことはよく知られている．この群が今回の研究対象である．$\mathcal{G}^{(\lambda)}$ の $\mathbb{G}_{a,A}$ への作用が自明なものだけを扱う．

Weisfeiler [5] は A が整域の時に $\mathrm{Ext}^1_A\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$ の研究を行っており，特に体を含む整域のときに群 $\mathrm{Ext}^1_A\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$ の特徴付けを与えている．関口-諏訪 [2] では A が離散付値環のときに，$\mathcal{G}^{(\lambda)}$ の $\mathbb{G}_{a,A}$ への作用が自明でない場合も含めて研究し，結果を出している．

一方，関口-諏訪 [3] において，A が $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数（p は素数）のときに $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big)$ と $\mathrm{Ext}^1_A\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big)$ の群構造が特徴付けられている．ここで，$\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}$ や $\widehat{\mathbb{G}}_{m,A}$ は形式群スキーム．その主結果は第四節の前半で紹介するが，今簡単に述べておくと，$W(A)$（A の元を成分とする Witt ベクトルのなす環）のある自己準同型の核と余核に $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big)$ と $\mathrm{Ext}^1_A\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big)$ がぞれぞれ同型になる，という非常にスマートなものである．この理論のポイントは，本質的に Artin-Hasse exponential series を拡張した冪級数のみが homomorphism となりうる，というところにある．なお，$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}\big)$ や $\mathrm{Ext}^1_A\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A}\big)$ のいわゆる「代数群バージョン」の結果はその系として導かれる．

今回，$\mathbb{Z}_{(p)}$-代数上において $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ と $\mathrm{Ext}^1_A\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ の群構造を特徴付けることができた．主結果は関口-諏訪 [3] と同様にスマートで，$A^{\mathbb{N}}$ のある自己準同型の核，余核に $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ と $\mathrm{Ext}^1_A\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ がそれぞれ同型になるというものである．この理論のポイントは，本質的にある種の logarithm を変形した冪級数のみが homomorphism となりうる，というところにある．なお，$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$ や $\mathrm{Ext}^1_A\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$ に対する結果はその系として導かれる．(第二節にて主定理およびその系の紹介を行う．)

主定理の証明は至って素朴である．特に，$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ に対する結果は未定係数法による直接計算で導かれる．一方，アフィンスキーム上の $\mathbb{G}_a$-torsor が自明になることから $\mathrm{Ext}^1_A\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big) \simeq H^2_0\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$（Hochschild cohomology）となるので，$\mathrm{Ext}^1_A\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ の特徴付けはもっぱら 2-cocycle の計算によって成される．特に，2-cocycle の正規化の際に Lazard [1] による補題が重要な役割を担う．(第三節にて証明の概略を解説する．)

さて，いわば「指数関数」がその主幹を成していた $\mathbb{G}_{m,A}$ に対する結果と，「対数関数」が主幹を成す $\mathbb{G}_{a,A}$ に対する結果との関係も非常に気になるところである．これについては，双数の環を導入することによって加法群を乗法群の Lie 環とみなし，関口-諏訪 [3] の結果と今回

の結果との結び付きを明確に与えることができた．なお，これは同時に $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ と $\mathrm{Ext}^1_A\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ に対する結果の別証明を与えている．(第四節の後半にて触れる.)

以下，特に断らない限り素数 p を固定し，A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数とする．$P = \{p^e; e \geq 0\}$ とおく．また $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ である．

2. 主定理

この節では我々の主定理について述べる．まずは，避けて通れない多項式や写像の定義から始める．A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数，$\lambda \in A$ とする．

2.1. $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ (resp. $A^{(\mathbb{N})}$) に対し，$A^{\mathbb{N}}$ (resp. $A^{(\mathbb{N})}$) の自己準同型 Ψ を

$$\Psi : \boldsymbol{a} \mapsto (-(-\lambda)^{p^{i+1}-p^i} a_i + p a_{i+1})_{i \geq 0}$$

で定義する．

Λ を不定元とする．任意の $r \geq 0$ に対し，$\mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda]$ 係数の多項式 $L_r(\Lambda; T)$ と $\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$ を，それぞれ

$$L_r(\Lambda; T) = p^r \sum_{i=1}^{p^{r+1}-1} \frac{(-\Lambda)^{i-1}}{i} T^i \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][T],$$

$$\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y) = -\frac{L_{p,r}(\Lambda; X) + L_{p,r}(\Lambda; Y) - L_{p,r}(\Lambda; \Lambda XY + X + Y)}{(-\Lambda)^{p^{r+1}-1}} \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][X, Y]$$

で定義する．$\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$ は矛盾なく定義され，関数等式

$$\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; Y, Z) + \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, \lambda YZ + Y + Z) = \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; \lambda XY + X + Y, Z) + \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$$

を満たす．

2.2. 群準同型 $\eta^0 : A^{\mathbb{N}} \to A[[T]]$ と $\eta^1 : A^{\mathbb{N}} \to Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ を，それぞれ

$$\eta^0 : \boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right],$$

$$\eta^1 : \boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \dots) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r \tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)$$

で定義する．(前節にて「ある種の logarithm を変形した冪級数」と称したのは，η^0 を定義する冪級数のことである.) このとき，次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccc}
A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\eta^0} & A[[T]] \\
\Psi \downarrow & & \downarrow \partial \\
A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\eta^1} & Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big).
\end{array}$$

ここで，∂ は $f(T) \mapsto f(X)+f(Y)-f(\lambda XY+X+Y)$ で定義される cocycle map である．上の可換図式から，群準同型

$$\eta^0 : \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{\mathbf{N}} \to A^{\mathbf{N}}] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big),$$
$$\eta^1 : \mathrm{Coker}\,[\Psi : A^{\mathbf{N}} \to A^{\mathbf{N}}] \to H_0^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$$

が誘導される．同様に

$$\eta^0 : \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{(\mathbf{N})} \to A^{(\mathbf{N})}] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$$
$$\eta^1 : \mathrm{Coker}\,[\Psi : A^{(\mathbf{N})} \to A^{(\mathbf{N})}] \to H_0^2\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$$

も誘導される．

以上の準備の下，主定理は次のように述べられる．

定理 2.3. 群準同型

$$\eta^0 : \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{\mathbf{N}} \to A^{\mathbf{N}}] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big),$$
$$\eta^1 : \mathrm{Coker}\,[\Psi : A^{\mathbf{N}} \to A^{\mathbf{N}}] \to H_0^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$$

は全単射．

系 2.4. 群準同型

$$\eta^0 : \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{(\mathbf{N})} \to A^{(\mathbf{N})}] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$$
$$\eta^1 : \mathrm{Coker}\,[\Psi : A^{(\mathbf{N})} \to A^{(\mathbf{N})}] \to H_0^2\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$$

は全単射．

補注 2.5. A が $\mathbb{Q}$-代数のときは，同型

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big) \simeq \Big\{\frac{a}{\lambda}\log(1+\lambda T)\,;\, a \in A\Big\},$$

を得る．ここで

$$\frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{i-1}}{i} T^i \in \mathbb{Q}[[T]].$$

例 2.6. $\lambda = 1$ とする．このとき $\Psi : A^{(\mathbf{N})} \to A^{(\mathbf{N})}$ は全単射．従って，

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\mathbb{G}_{m,A}, \mathbb{G}_{a,A}\big) = 0, \quad H_0^2\big(\mathbb{G}_{m,A}, \mathbb{G}_{a,A}\big) = 0$$

を得る．

例 2.7. $\lambda = 0$ とする．A の標数が 0 の場合，$\Psi : A^{(\mathbf{N})} \to A^{(\mathbf{N})}$ は全射．従って，$H_0^2\big(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$ 0．また，容易な計算で

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}\big) \simeq \{aT\,;\, a \in A\} \simeq A.$$

一方，A の標数を p とすると $\Psi : A^{(\mathbb{N})} \to A^{(\mathbb{N})}$ は零射で，

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}\big) \simeq \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} a_r T^{p^r} \,;\, (a_0, a_1, \dots) \in A^{(\mathbb{N})} \right\} \simeq A^{(\mathbb{N})},$$

$$H_0^2\big(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}\big) \simeq \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\frac{X^{p^{r+1}} + Y^{p^{r+1}} - (X+Y)^{p^{r+1}}}{p} \right] ;\, (a_0, a_1, \dots) \in A^{(\mathbb{N})} \right\} \simeq A^{(\mathbb{N})}.$$

3. 証明の概略（1）

この節では主定理の証明の概略について述べる．A を $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数，$\lambda \in A$ とする．

まずは $\eta^0 : \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ の全単射性だが，単射性は明白である．全射性は下の補題により直ちに導かれる．

補題 3.1. $f(T) \in A[[T]]$ とする．$f(T)$ が関数等式 $f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y) = 0$ を満たせば，ある $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}]$ が存在して $f(T) = \eta^0(\boldsymbol{a})$ となる．

証明. $f(T) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i T^i$ とおく．仮定から $c_0 = 0$ は容易．$f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y)$ をテイラー展開し，仮定と合わせると

$$\begin{aligned} 0 &= f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y) \\ &= -\sum_{j \geq 2} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{i=m(j,k)}^{k} \binom{j-k+i}{j-2k+2i} \binom{j-2k+2i}{i} \lambda^{k-i} c_{j-k+i} X^k Y^{j-k} \end{aligned}$$

を得る（定数項は省いた）．ここで $m(j,k) = \max\{0, 2k-j\}$．以降，未定係数法により $f(T)$ の係数を決定していく．まず XY^{j-1} の係数を比較すると，任意の $j \geq 2$ に対し，

$$(j-1)\lambda c_{j-1} + j c_j = 0 \tag{1}$$

を得る．このとき，$s \geq 0,\ p^s < j < p^{s+1}$ なる任意の s, j に対し，

$$c_j = \frac{p^s}{j}(-\lambda)^{j-p^s} c_{p^s} \tag{2}$$

となることが帰納的に示される．上式は，例えば $\mathbb{Q}$ 上での考察なら (1) から直ちに従うが，$\mathbb{Z}_{(p)}$-代数上では容易でない．$(j,p) \neq 1$ のときには，主に二項係数の計算によって上手く回避する必要がある．さて，上の (1) と (2) を合わせると，任意の $s \geq 0$ に対して

$$-(-\lambda)^{p^{s+1}-p^s} c_{p^s} + p c_{p^{s+1}} = 0 \tag{3}$$

を得る．未定係数法で全ての関係式を詰めていくと，最終的に (2) と (3) に帰着されることがわかる．従って，任意の $r \geq 0$ に対して $a_r = c_{p^r}$，$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ とおけば，$\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}]$ かつ

$$f(T) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i}(-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] = \eta^0(\boldsymbol{a}). \ \square$$

$\eta^0 : \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{(\mathbb{N})} \to A^{(\mathbb{N})}] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ の全単射性は，上と下の補題を組み合わせることにより得られる．

補題 3.2. $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$ とする．任意の $r \geq 0$ に対して $-(-\lambda)^{p^{r+1}-p^r} a_r + p a_{r+1} = 0$ が成り立つと仮定する．このとき，もし

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] \in A[T, \tfrac{1}{1+\lambda T}]$$

ならば，有限個を除くすべての r について $a_r = 0$.

証明. まず

$$(1+\lambda T)^n \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] = f(T)$$

とおく．ここで，$f(T) \in A[T]$, $n \geq 0$. 今，$\deg f < p^r$ とする．両辺の T^{p^r} の係数を比較すると，$1 \leq i \leq r$ なる i について

$$a_r + \sum_{i=1}^{r} c_i (-\lambda)^{p^r - p^{r-i}} a_{r-i} = 0.$$

ここで $c_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$. 仮定より，$1 \leq i \leq r$ なる i について

$$(-\lambda)^{p^r - p^{r-i}} a_{r-i} = p^i a_r.$$

$1 + \sum_{i=1}^{r} p^i c_i$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$ で逆元を持つから，$\deg f < p^r$ なる r について $a_r = 0$. □

次に η^1 : $\mathrm{Coker}\,[\Psi : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}] \to H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の全単射性である．この証明の本質は，Lazard の comparison lemma（以下「Lazard の補題」で統一）を使って 2-cocycle $g(X,Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ を正規化するところにある．

Lazard の補題（[1, Lem 3]）A を任意の可換環とし，$l \geq 2$ とする．$g(X,Y) \in A[X,Y]$ を，

$$\begin{cases} g(Y,Z) + g(X, Y+Z) = g(X+Y, Z) + g(X,Y), \\ g(X,Y) = g(Y,X) \end{cases}$$

を満たす次数 l の斉次多項式とする．このとき，ある $a \in A$ が存在して

$$g(X,Y) = aC_l(X,Y)$$

と表せる．ここで，$C_l(X,Y)$ は

$$C_l(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{X^l + Y^l - (X+Y)^l}{p} & (l \in P) \\ X^l + Y^l - (X+Y)^l & (l \notin P) \end{cases}$$

で定義される $\mathbb{Z}$ 係数の多項式.

補題 3.3. $g(X,Y) \in Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ とする. このとき, ある $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ が存在して, $g(X,Y)$ は $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} b_r \tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)$ と cohomologous. (すなわち $H_0^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ の元として一致する.)

証明. $g(X,Y) \in Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ とし, $g(X,Y)$ を次のように斉次式に分解する:

$$g(X,Y) = \sum_{r=l}^{\infty} g_r(X,Y).$$

$l \geq 2$ としてよい. $g(X,Y)$ は関数等式

$$g(Y,Z) + g(X, \lambda YZ + Y + Z) = g(\lambda XY + X + Y, Z) + g(X,Y)$$

を満たすので, $g_l(X,Y)$ は

$$g_l(Y,Z) + g_l(X, Y+Z) = g_l(X+Y, Z) + g_l(X,Y)$$

を満たす. 従って, Lazard の補題により, ある $a_l \in A$ が存在して $g_l(X,Y) = a_l C_l(X,Y)$. ここで, 任意の $r \geq 1$ に対して

$$t_r(X,Y) = X^r + Y^r - (\lambda XY + X + Y)^r \in B^2\big(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}\big)$$

とおく. $t_l(X,Y) \equiv X^l + Y^l - (X+Y)^l \bmod \deg\,(l+1)$ だから, $l \notin P$ ならば,

$$g(X,Y) - a_l t_l(X,Y) \equiv 0 \bmod \deg\,(l+1)$$

を得る. $l+1 \notin P$ ならば, $g(X,Y) - a_l t_l(X,Y) \in Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ に対して同じ議論を適用できる. 従って, 結局

$$g(X,Y) - \sum_{r=l}^{p^e-1} a_r t_r(X,Y) = \sum_{r=p^e}^{\infty} g'_r(X,Y)$$

という斉次式分解を得る. ここで $e \geq 1$. さて, $g'_{p^e}(X,Y)$ に対しても Lazard の補題が適用できるので, ある $a_{p^e} \in A$ が存在して

$$g(X,Y) - \sum_{r=l}^{p^e-1} a_r t_r(X,Y) \equiv a_{p^e} C_{p^e}(X,Y) \bmod \deg\,(p^e+1)$$

となる. ここまでは上と変わらないが, $C_{p^e}(X,Y)$ の定義から, 今度は $t_{p^e}(X,Y)$ を用いずに $\tilde{L}_{p,e-1}(\lambda; X,Y)$ を使う. (実は, 任意の $r \geq 0$ に対して

$$\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X,Y) \equiv C_{p^{r+1}}(X,Y) \quad \bmod\ \deg(p^{r+1}+1)$$

となることが単純な計算によりわかる.）すると，次を得る：

$$g(X,Y)-\sum_{r=l}^{p^e-1}a_r t_r(X,Y)-a_{p^e}\tilde{L}_{p,e-1}(\lambda;X,Y)\equiv 0 \mod \deg(p^e+1).$$

$\tilde{L}_{p,e-1}(\lambda;X,Y)\in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ だから，上式の左辺は $Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の元．従って今までの議論を繰り返すことにより，結局 $A[[X,Y]]$ の中で

$$g(X,Y)-\sum_{\substack{r\geq l\\ r\notin P}}a_r t_r(X,Y)-\sum_{r=e}^{\infty}a_{p^r}\tilde{L}_{p,r-1}(\lambda;X,Y)=0$$

を得る．左辺の第二項は $B^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の元だから，任意の $r\geq e-1$ に対して $b_r=a_{p^{r+1}}$ とおけば，$g(X,Y)$ は $\displaystyle\sum_{r=e-1}^{\infty}b_r\tilde{L}_{p,r}(\lambda;X,Y)$ と cohomologous である．□

上の補題から $\eta^1:\mathrm{Coker}\,[\Psi:A^{\mathbb{N}}\to A^{\mathbb{N}}]\to H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の全射性が従う．さて，残されたのは η^1 の単射性であるが，これは下の補題から得られる．

補題 3.4. $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1,b_2,\dots)\in A^{\mathbb{N}}$ とし，$g(X,Y)=\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}b_r\tilde{L}_{p,r}(\lambda;X,Y)\in A[[X,Y]]$ とおく．このとき，

$$g(X,Y)=f(X)+f(Y)-f(\lambda XY+X+Y) \tag{4}$$

となる $f(T)\in A[[T]]$ が存在するならば，任意の $r\geq 0$ に対して

$$b_r=-(-\lambda)^{p^{r+1}-p^r}a_r+pa_{r+1}$$

となる $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,a_2,\dots)\in A^{\mathbb{N}}$ が存在する．

証明. 誌面の都合上とてもすべての計算を紹介することはできない．手法は，homomorphism を決定したときと同様，(4) 式に対して未定係数法を用いる．詳細は [6, Lem3.6] を参照のこと．□

$\eta^1:\mathrm{Coker}\,[\Psi:A^{(\mathbb{N})}\to A^{(\mathbb{N})}]\to H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathbb{G}_{a,A})$ の全単射性は，$g(X,Y)\in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)},\widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ が多項式になるための条件を調べることによって得られる．やはりここでも未定係数法を用いる．詳細は [6, Cor3.5] を参照のこと．

4. 証明の概略（2）

この節では主定理の別証明について触れる．準備として，前半では関口-諏訪 [3] の主結果を紹介する．そして後半にて別証明の概略を解説する．A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数，$\lambda\in A$ とする．

4.1. 関口-諏訪 [3] の主結果

まず Aritn-Hasse exponential series を拡張した形式冪級数を定義する．詳細は関口-諏

訪 [3, Ch2] を参照されたい.

4.1.1. U, Λ を不定元とし，$\mathbb{Q}[U,\Lambda]$ 係数の形式冪級数 $E_p(U,\Lambda;T)$ を

$$E_p(U,\Lambda;T) = (1+\Lambda T)^{\frac{U}{\Lambda}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\Lambda^{p^k}T^{p^k}\right)^{\frac{1}{p^k}\{(\frac{U}{\Lambda})^{p^k}-(\frac{U}{\Lambda})^{p^{k-1}}\}}$$

で定義する．これは Artin-Hasse exponential series

$$E_p(T) = \exp\left(\sum_{r\geq 0} \frac{T^{p^r}}{p^r}\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$$

を用いて

$$E_p(U,\Lambda;T) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{(k,p)=1} E_p(U\Lambda^{k-1}T^k)^{(-1)^{k-1}/k} & (p>2), \\ \displaystyle\prod_{(k,2)=1} E_p(U\Lambda^{k-1}T^k)^{1/k} \left[\prod_{(k,2)=1} E_p(U\Lambda^{2k-1}T^{2k})^{1/k}\right]^{-1} & (p=2) \end{cases}$$

と表せることが示される．$(k,p)=1$ ならば $(1+T)^{1/k} \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$ となることから，$E_p(U,\Lambda;T) =\in \mathbb{Z}_{(p)}[U,\Lambda][[T]]$. 特に，$E_p(1,0;T)=E_p(T)$，$E_p(\Lambda,\Lambda;T)=1+\Lambda T$ である．

$\mathbb{U}=(U_0,U_1,U_2,\dots)$ とする．$E_p(\mathbb{U},\Lambda;T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U_0,U_1,U_2,\dots,\Lambda][[T]]$ を

$$E_p(\mathbb{U},\Lambda;T) = \prod_{k=0}^{\infty} E_p(U_k,\Lambda^{p^k};T^{p^k}).$$

で定義する．さらに，$F_p(\mathbb{U},\Lambda;X,Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U_0,U_1,U_2,\dots,\Lambda][[X,Y]]$ を

$$F_p(\mathbb{U},\Lambda;X,Y) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1+\Lambda^{p^k}X^{p^k})(1+\Lambda^{p^k}Y^{p^k})}{1+\Lambda^{p^k}(X+Y+\Lambda XY)^{p^k}}\right]^{\Phi_{k-1}(\mathbb{U})/p^k\Lambda^{p^k}}$$

で定義する．ここで $\Phi_n(\mathbb{U})$ は Witt 多項式.

4.1.2. 群準同型 $\xi^0 : W(A) \to A[[T]]^\times$ と $\xi^1 : W(A) \to Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big)$ を，それぞれ $\boldsymbol{a} \mapsto E_p(\boldsymbol{a},\lambda;T)$，$\boldsymbol{a} \mapsto F_p(\boldsymbol{a},\lambda;X,Y)$ によって定義する．F を Witt 環の Frobenius 自己準同型とし，$F^{(\lambda)} = F - (\lambda^{p-1},0,0,\dots)$ とおく．このとき，次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccc} W(A) & \xrightarrow{\xi^0} & A[[T]]^\times \\ {\scriptstyle F^{(\lambda)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ W(A) & \xrightarrow{\xi^1} & Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big). \end{array}$$

ここで $\partial : A[[T]]^\times \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ は $f(T) \mapsto f(X)f(Y)f(\lambda XY+X+Y)^{-1}$ で定義される cocycle map．このとき，ξ^0 と ξ^1 は群準同型

$$\xi^0 : {}_{F^{(\lambda)}}W(A) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A});\ \boldsymbol{a} \mapsto E_p(\boldsymbol{a}, \lambda; T),$$
$$\xi^1 : W(A)/F^{(\lambda)} \to H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A});\ \boldsymbol{a} \mapsto F_p(\boldsymbol{a}, \lambda; X, Y)$$

を誘導する．ここで ${}_{F^{(\lambda)}}W(A)$ は $F^{(\lambda)} : W(A) \to W(A)$ の核を意味する．このとき，関口-諏訪 [3] の主結果は次のように述べられる．

定理 4.1.3. ([3, Th 2.19.1]) 群準同型

$$\xi^0 : {}_{F^{(\lambda)}}W(A) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}),$$
$$\xi^1 : W(A)/F^{(\lambda)} \to H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

は全単射．

4.2. 証明の概略（2）

$A[\varepsilon]$ を双数の環（すなわち，$\varepsilon^2 = 2$ なる ε を A に添加した環）とする．まず，加法群と乗法群を結びつけるために，双数の環を介した群の完全列をいくつか定義する．

4.2.1. 群準同型 $A[[T]] \to (A[\varepsilon][[T]])^\times$，$(A[\varepsilon][[T]])^\times \to A[[T]]^\times$ を，それぞれ $f(T) \mapsto 1+\varepsilon f(T)$，$f(T)+\varepsilon g(T) \mapsto f(T)$ によって定義する．このとき，

$$0 \to A[[T]] \to (A[\varepsilon][[T]])^\times \to A[[T]]^\times \to 0$$

は群の完全列．さらに，群準同型 $Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]})$，$Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ を，それぞれ $f(X,Y) \mapsto 1+\varepsilon f(X,Y)$，$f(X,Y)+\varepsilon g(X,Y) \mapsto f(X,Y)$ で定義する．このとき，

$$0 \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \to 0$$

は群の完全列．

Augmentation homomorphism $W(A[\varepsilon]) \to W(A)$ は $(a_0+b_0\varepsilon, a_1+b_1\varepsilon, a_2+b_2\varepsilon, \dots) \mapsto (a_0, a_1, a_2, \dots)$ で定義される．このとき，

$$\mathrm{Ker}\,[W(A[\varepsilon]) \to W(A)] = \{(b_0\varepsilon, b_1\varepsilon, b_2\varepsilon, \dots);\ b_i \in A \text{ for all } i \geq 0\}$$

は $W(A[\varepsilon])$ の square null ideal で，加法群として $A^{\mathbf{N}}$ と同型．従って，群の完全列

$$0 \to A^{\mathbf{N}} \to W(A[\varepsilon]) \to W(A) \to 0$$

を得る．

$F : W(A[\varepsilon]) \to W(A[\varepsilon])$ は $A^{\mathbf{N}}$ の自己準同型 $(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_1, pa_2, pa_3, \dots)$ を誘導する．$\boldsymbol{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots) \in W(A)$ とする．このとき，$F - \boldsymbol{c} : W(A[\varepsilon]) \to W(A[\varepsilon])$ は

$A^{\mathbb{N}}$ の自己準同型 $(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_1 - \Phi_0(\boldsymbol{c})a_0, pa_2 - \Phi_1(\boldsymbol{c})a_1, pa_3 - \Phi_2(\boldsymbol{c})a_2, \dots)$ を誘導する．特に，$F^{(\lambda)} : W(A[\varepsilon]) \to W(A[\varepsilon])$ は

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_{r+1} - \lambda^{p^{r+1}-p^r} a_r)_{r \geq 0}$$

を誘導する．これを Φ と書く．

4.2.2. Λ を不定元とし，$\mathbb{Q}[\Lambda]$ 係数の形式冪級数 $L_p(\Lambda; T)$ と $L_{p,r}(\Lambda; X, Y)$ を，それぞれ

$$L_p(\Lambda; T) = \frac{1}{\Lambda}\left\{\log(1 + \Lambda T) - \frac{1}{p}\log(1 + \Lambda^p T^p)\right\},$$
$$L_{p,r}(\Lambda; X, Y) = \frac{1}{p\Lambda^{p^{r+1}}} \log \frac{(1 + \Lambda^{p^{r+1}} X^{p^{r+1}})(1 + \Lambda^{p^{r+1}} Y^{p^{r+1}})}{1 + \Lambda^{p^{r+1}}(X + Y + \Lambda XY)^{p^{r+1}}}$$

で定義する．単純な計算により

$$L_p(\Lambda; T) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(k,p)=1} \frac{(-\Lambda)^{k-1}}{k} T^k & (p > 2), \\ \displaystyle\sum_{(k,2)=1} \frac{\Lambda^{k-1}}{k} T^k - \sum_{(k,2)=1} \frac{\Lambda^{2k-1}}{k} T^{2k} & (p = 2) \end{cases}$$

となる．すなわち，$L_p(\Lambda; T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][[T]]$. さらに，

$$\frac{(1 + \Lambda^{p^{r+1}} X^{p^{r+1}})(1 + \Lambda^{p^{r+1}} Y^{p^{r+1}})}{1 + \Lambda^{p^{r+1}}(X + Y + \Lambda XY)^{p^{r+1}}} \equiv 1 \mod p$$

に注意すると $L_{p,r}(\Lambda; X, Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][[X, Y]]$ であることもわかる．

4.2.3. 群準同型 $\xi^0 : A^{\mathbb{N}} \to A[[T]]$，$\xi^0 : W(A[\varepsilon]) \to (A[\varepsilon][[T]])^\times$ を，それぞれ

$$\xi^0 : A^{\mathbb{N}} \to A[[T]];\ \boldsymbol{a} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r})$$
$$\xi^0 : W(A[\varepsilon]) \to (A[\varepsilon][[T]])^\times;\ \boldsymbol{a} \mapsto E_p(\boldsymbol{a}, \lambda; T)$$

で定義する．さらに，$\xi^1 : A^{\mathbb{N}} \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ と $\xi^1 : W(A[\varepsilon]) \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]})$ を

$$\xi^1 : A^{\mathbb{N}} \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A});\ \boldsymbol{a} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_{p,r}(\lambda; X, Y)$$
$$\xi^1 : W(A[\varepsilon]) \to Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]});\ \boldsymbol{a} \mapsto F_p(\boldsymbol{a}, \lambda; X, Y)$$

で定義する．

以上の準備の下，我々は次の補題を得る：

補題 4.2.4. 次の図式は可換．

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr] & & A[[T]] \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & (A[\varepsilon][[T]])^{\times} \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & A[[T]]^{\times} \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A^{\mathbf{N}} \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0"] \arrow[dd, "\Phi"] & & W(A[\varepsilon]) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0"] \arrow[dd, "F^{(\lambda)}"] & & W(A) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0"] \arrow[dd, "F^{(\lambda)}"] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big) \arrow[rr] & & Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}\big) \arrow[rr] & & Z^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big) \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A^{\mathbf{N}} \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1"] & & W(A[\varepsilon]) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1"] & & W(A) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1"] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

証明. ポイントとなるのは，上で定義した $E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T)$ と $L_p(\Lambda; T)$，また $F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y)$ と $L_{p,r}(\Lambda; X, Y)$ の間に次のような関係があることである（それほど自明ではない）：

$$
E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T) \equiv 1 + \sum_{r=0}^{\infty} U_r L_p(\Lambda^{p^r}; T^{p^r}) \mod (U_0, U_1, U_2, \dots)^2,
$$
$$
F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y) \equiv 1 + \sum_{r=0}^{\infty} U_r L_{p,r}(\Lambda; X, Y) \mod (U_0, U_1, U_2, \dots)^2.
$$

これより，$\boldsymbol{b} = (a_0\varepsilon, a_1\varepsilon, a_2\varepsilon, \dots)$ とすると

$$
E_p(\boldsymbol{b}, \lambda; T) = 1 + \sum_{r=0}^{\infty} (a_r\varepsilon) L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}) = 1 + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}),
$$
$$
F_p(\boldsymbol{b}, \lambda; X, Y) = 1 + \sum_{r=0}^{\infty} (a_r\varepsilon) L_{p,r}(\lambda; X, Y) = 1 + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_{p,r}(\lambda; X, Y)
$$

を得る．その他の部分については比較的容易に確かめられる．□

4.2.5. $B = A[\varepsilon]$ とおき，$\prod_{B/A}$ を Weil restriction functor とする．分裂する形式群スキームの完全列

$$
0 \to \widehat{\mathbb{G}}_{a,A} \to \Big[\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B}\Big]^{\wedge} \to \widehat{\mathbb{G}}_{m,A} \to 0
$$

から，長完全列

$$
0 \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big) \to \mathrm{Hom}_{B\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}\big) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big) \to 0,
$$
$$
0 \to H_0^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big) \to H_0^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}\big) \to H_0^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}\big) \to 0
$$

を得る．上の補題と合わせ，本稿最終ページの可換図式を得る．従って，関口-諏訪 [3] の主結果から，$\xi^0 : \mathrm{Ker}\,\Phi \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$，$\xi^1 : \mathrm{Coker}\,\Phi \to H_0^2\big(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}\big)$ は同型．

4.2.6. $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$ とする．任意の $r \geq 0$ に対して $\lambda^{p^{r+1}-p^r} a_r = p a_{r+1}$ が成り立つ

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{k=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{k} (-\lambda)^{k-p^r} T^k \right] & (p > 2), \\ \displaystyle a_0 T - \sum_{r=1}^{\infty} a_r \left[\sum_{k=2^r}^{2^{r+1}-1} \frac{2^r}{k} (-\lambda)^{k-2^r} T^k \right] & (p = 2) \end{cases}$$

となることが示される．また，任意の $r \geq 0$ に対して

$$L_{p,r}(\Lambda; X, Y) = \frac{p^r}{(-\Lambda)^{p^{r+1}-1}} \sum_{k=1}^{p^{r+1}-1} \frac{(-\Lambda)^{k-1}}{k} \{X^k + Y^k - (X + Y + \Lambda XY)^k\}$$

と定義する．このとき，$H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の元として

$$[L_{p,r}(\lambda; X, Y)] = \begin{cases} [\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)] & (p > 2), \\ -[\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)] & (p = 2) \end{cases}$$

となることがわかる．これより，群準同型

$$\eta^0 : \mathrm{Ker}\,[\Psi : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}] \to \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}),$$
$$\eta^1 : \mathrm{Coker}\,[\Psi : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}] \to H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$$

の全単射性が導かれる．

参考文献

[1] M.Lazard, *Sur les groupes de Lie formels à un paramétre*, Bulletin de la Société Mathématique de France 83 (1955), pp.251-274.

[2] T.Sekiguchi, N.Suwa, *Some cases of extensions of group schemes over a discrete valuation ring I*, Journal of The Faculty of Science, the University of Tokyo, Sec.IA, Vol.38, No.1 (1991), pp.1-45.

[3] T.Sekiguchi, N.Suwa, *A note on extensions of algebraic and formal groups, IV*, Preprint series, CHUO MATH No.48 (1999).

[4] N.Suwa, *A letter to T.Sekiguchi* (1999).

[5] B.Weisfeiler, *On a case of extensions of group schemes*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.248, No.1 (1979), pp.171-189.

[6] —, *On the extensions of the formal group schemes $\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}$ by $\widehat{\mathbb{G}}_a$ over a $\mathbb{Z}_{(p)}$-algebra*, Preprint (2000).

[DG] M.Demazure, P.Gabriel, *Groupes algébriques, Tome 1*, Masson-North-Holland (1970).

[HZ] M.Hazewinkel, *Formal groupes and applications*, Academic Press (1978).

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & \\
 & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & 0 \arrow[dd] & & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathrm{gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_{A[\varepsilon]\text{-}\mathrm{gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathrm{gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & \operatorname{Ker}\Phi \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0", "\sim"'] \arrow[dd] & & {}_{F^{(\lambda)}}W(A[\varepsilon]) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0", "\sim"'] \arrow[dd] & & {}_{F^{(\lambda)}}W(A) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0", "\sim"'] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & A[[T]] \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & (A[\varepsilon][[T]])^{\times} \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & A[[T]]^{\times} \arrow[rr] \arrow[dd, "\partial"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A^{\mathbb{N}} \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0"] \arrow[dd, "\Phi"] & & W(A[\varepsilon]) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0"] \arrow[dd, "F^{(\lambda)}"] & & W(A) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^0"] \arrow[dd, "F^{(\lambda)}"] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A^{\mathbb{N}} \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1"] \arrow[dd] & & W(A[\varepsilon]) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1"] \arrow[dd] & & W(A) \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1"] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & H^2_0(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^2_0(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^2_0(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & \operatorname{Coker}\Phi \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1", "\sim"'] \arrow[dd] & & W(A[\varepsilon])/F^{(\lambda)} \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1", "\sim"'] \arrow[dd] & & W(A)/F^{(\lambda)} \arrow[rr] \arrow[ur, "\xi^1", "\sim"'] \arrow[dd] & & 0 & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$